ENSI DE PHYSIQUE ET MECANIQUE (M I) 1980

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

On considère, pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) \qquad n(x)\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \lambda,$$

où n est une fonction donnée, définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ continue et croissante.

a. Dans un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, mettre en évidence une propriété simple de la courbe représentative de toute solution y de (E_λ), en cherchant une interprétation géométrique du rapport $\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

b. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert non vide J de $\mathbb{R}$ sur lequel (E_λ) admette une solution. Montrer que l'ensemble $I_\lambda = \{ x \in \mathbb{R} / n(x) > \lambda \}$ n'est pas vide.

Montrer que I_λ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

c. Réciproquement, montrer que si l'ensemble I_λ n'est pas vide, I_λ est le plus grand intervalle ouvert sur lequel (E_λ) admette des solutions.

d. Dans toute la suite du problème, la fonction n est ainsi définie :

$$(\forall x < 0), \quad n(x) = 1$$
$$(\forall x \in [0,1]), \quad n(x) = x + 1$$
$$(\forall x > 1), \quad n(x) = 2.$$

Déterminer l'ensemble L des réels $\lambda \geqslant 0$ tels que l'équation (E_λ) admette des solutions sur $\mathbb{R}$.

Pour $\lambda \in L$, calculer la solution y_λ de (E_λ) telle que $y_\lambda(0) = 0$.

e. Étant donné un réel $t > 1$, on considère la fonction ψ_t définie sur [0, 1] par :

$$(\forall \lambda \in [0,1]), \qquad \psi_t(\lambda) = \lambda \operatorname{Log} \frac{t + \sqrt{t^2 - \lambda^2}}{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}.$$

Étudier et représenter graphiquement la fonction ψ_t (on remarquera que ψ_t' est la somme de deux fonctions positives). On déterminera les demi-tangentes aux points 0 et 1.

f. Établir une relation simple entre $y_\lambda(x)$ et $\psi_{1+x}(\lambda)$ pour $x \in]0, 1]$ et $\lambda \in [0, 1[$. Représenter sur un même graphique les fonctions y_0, y_λ et $y_{\lambda'}$, où λ et λ' sont deux éléments donnés de l'ensemble L, tels que $0 < \lambda < \lambda'$; on étudiera en particulier les positions relatives des courbes représentatives de y_λ et $y_{\lambda'}$.

g. Déterminer l'ensemble A des réels a pour lesquels il existe $\lambda \in L$ tels que $y_\lambda(1) = a$. Montrer que, pour tout $a \in A$, la valeur $\lambda(a)$ de λ répondant à la question est unique.

II

Dans la suite du problème, I désigne l'intervalle [0, 1], $C^1(I)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur I (c'est-à-dire ayant une dérivée continue sur I).

a. Montrer que l'ensemble $\Gamma^1(I)$ des fonctions $\delta \in C^1(I)$ telles que $\delta(0) = \delta(1) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I)$.

b. Soit c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d \leqslant 1$, et h la fonction définie sur I par :

$$(\forall x \in [0, c[), \quad h(x) = 0$$
$$(\forall x \in [c, d]), \quad h(x) = (x - c)^2 (d - x)^2$$
$$(\forall x \in]d, 1]), \quad h(x) = 0.$$

Vérifier que $h \in \Gamma^1(I)$. Calculer l'intégrale $\int_0^1 h(x)\,dx$.

c. Dans ce qui suit, k désigne une fonction réelle, définie et continue sur I. Montrer que l'application :

$$K : \delta \to K(\delta) = \int_0^1 k(x)\,\delta(x)\,dx$$

de $\Gamma^1(I)$ dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\Gamma^1(I)$.

d. Montrer que, si k n'est pas la fonction nulle sur I, il existe une fonction $\delta \in \Gamma^1(I)$ telle que $K(\delta) \neq 0$. En déduire que $K(\delta) = 0$ quelle que soit $\delta \in \Gamma^1(I)$ si et seulement si $k = 0$.

e. K′ est la forme linéaire sur $\Gamma^1(I)$ définie par :

$$(\forall\, \delta \in \Gamma^1(I)),\quad K'(\delta) = \int_0^1 k(x)\,\delta'(x)\,dx$$

où δ' représente la dérivée de δ.

Quelle valeur faut-il donner à la constante réelle μ pour qu'il existe $\delta_\mu \in \Gamma^1(I)$ ayant pour dérivée

$$\delta'_\mu(x) = k(x) - \mu\,?$$

Vérifier que, pour cette valeur de μ, on a :

$$K'(\delta_\mu) = \int_0^1 (k(x) - \mu)^2\,dx.$$

En déduire que $K'(\delta) = 0$ quelle que soit $\delta \in \Gamma^1(I)$ si et seulement si k est constante.

f. Dans le cas particulier, où $k \in C^1(I)$, retrouver cette condition en utilisant le résultat du II.*d*.

III

a. Vérifier que l'application $y \longmapsto \|y\| = \sup_{x \in I} |y(x)|$ de $C^1(I)$ dans $\mathbb{R}_+$ est une norme sur $C^1(I)$.

b. $a \geqslant 0$ étant donné, on désigne par $\Gamma^1_a(I)$ l'ensemble des éléments $y \in C^1(I)$ tels que $y(0) = 0$ et $y(1) = a$. Montrer que $\Gamma^1_a(I)$ est une variété linéaire affine de $C^1(I)$ muni de sa structure affine canonique. On en donnera un point et la direction.

c. On désigne par $f : (x, u) \longmapsto f(x, u)$ une fonction réelle donnée, définie sur $\Delta = I \times \mathbb{R}$, continue, ayant une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ continue sur Δ. Étant donné deux réels α et β $(\alpha < \beta)$, montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que les conditions :

$$x \in I\,;\qquad u_1 \in [\alpha, \beta],\ u_0 \in [\alpha, \beta] \qquad \text{et} \qquad |u_1 - u_0| < \eta$$

entraînent :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_1) - \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0) \right| < \varepsilon.$$

Montrer alors qu'en posant, pour tout réel u :

$$\int_0^1 f(x, u)\,dx = \varphi(u)$$

on a :

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{\varphi(u_0 + h) - \varphi(u_0)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_0)\,dx \right| = 0$$

quel que soit le réel u_0. Que peut-on en déduire ?

.../...

d. On considère l'application $F : Y \to \int_0^1 f(x, Y'(x))\,dx$ de $\Gamma_a^1(I)$ dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'un élément y de $\Gamma_a^1(I)$ correspond à un minimum local strict de F s'il existe $r > 0$ tel que les relations : $Y \in \Gamma_a^1(I)$ et $\| Y - y \| \in]0, r[$ entraînent $F(Y) - F(y) > 0$. Démontrer que si y correspond à un minimum local strict de F, alors, pour toute fonction $\delta \in \Gamma^1(I)$ non nulle, l'application :

$$G_\delta : \theta \longmapsto \int_0^1 f(x, y'(x) + \theta\,\delta'(x))\,dx$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ présente un minimum local strict pour $\theta = 0$. Vérifier que G_δ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de $G'_\delta(0)$ sous forme d'intégrale. (On admettra pour cela que, sous la seule condition que l'application g : $(x, \theta) \longmapsto g(x, \theta)$ de $I \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admette une dérivée partielle : $(x, \theta) \longmapsto \frac{\partial g}{\partial \theta}(x, \theta)$ continue, l'application γ : $\theta \to \int_0^1 g(x, \theta)\,dx$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout

$$\theta \in \mathbb{R} : \gamma'(\theta) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \theta}(x, \theta)\,dx.$$

e. Déduire de ce qui précède qu'une condition nécessaire pour que la fonction $y \in \Gamma_a^1(I)$ corresponde à un minimum local strict de F est l'existence d'un réel λ tel que l'on ait :

$$(\forall\, x \in I), \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(x, y'(x)) = \lambda.$$

IV

a. On prend désormais pour fonction f la fonction réelle définie sur Δ par :

$$(\forall\, (x, u) \in \Delta), \qquad f(x, u) = (x + 1)\sqrt{1 + u^2}$$

Étant donné $a \in A$, montrer que, si y correspond à un minimum local strict de F, y est nécessairement la restriction à I de la fonction $y_{\lambda(a)}$ définie dans la partie I.

b. Réciproquement, on se propose de montrer que cette fonction correspond, non seulement à un minimum local strict de F, mais au minimum strict absolu, c'est-à-dire que l'on a $F(Y) - F(y) > 0$ pour tout $Y \in \Gamma_a^1(I)$ distinct de y. Déduire ce résultat de l'étude du signe de l'intégrale :

$$\int_0^1 \Phi(x, y'(x)\ ,\ \delta'(x))\,dx,$$

où δ est un élément de $\Gamma^1(I)$ et Φ est la fonction réelle définie sur $I \times \mathbb{R}^2$ par :

$$(\forall\, (x, u, v) \in I \times \mathbb{R}^2), \ \Phi(x, u, v) = f(x, u + v) - f(x, u) - v\frac{\partial f}{\partial u}(x, u).$$

c. Montrer que l'étude précédente fournit la solution du problème suivant : dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy un point mobile doit parcourir un arc γ d'origine $(0, 0)$, d'extrémité $(1, a)$, d'équation $y = y(x)$, où $x \to y(x)$ appartient à $C^1(I)$. Sa vitesse en tout point (x, y) de sa trajectoire a pour valeur imposée $\frac{1}{x + 1}$. Déterminer l'arc γ correspondant au temps de parcours minimum.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail